Keteraturan Barisan dan Penyajian Data dalam Bentuk Matriks

MODUL TEMA 8

MATEMATIKA PAKET C
SETARA SMA/MA
KELAS XI

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2018

Keteraturan Barisan dan Penyajian Data dalam Bentuk Matriks

MODUL TEMA 8

MATEMATIKA PAKET C
SETARA SMA/MA
KELAS XI

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2018

Matematika Paket C - Setara SMA/MA kelas XI
Modul Tema 8 : Keteraturan Barisan dan Penyajian Data dalam Bentuk Matriks

- **Penulis:** Nursanto

- **Diterbitkan oleh**: Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan-Ditjen Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat-Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2018

iv+ 36 hlm + illustrasi + foto; 21 x 28,5 cm

Modul Dinamis: Modul ini merupakan salah satu contoh bahan ajar pendidikan kesetaraan yang berbasis pada kompetensi inti dan kompetensi dasar dan didesain sesuai kurikulum 2013. Sehingga modul ini merupakan dokumen yang bersifat dinamis dan terbuka lebar sesuai dengan kebutuhan dan kondisi daerah masing-masing, namun merujuk pada tercapainya standar kompetensi dasar.

Kata Pengantar

Pendidikan kesetaraan sebagai pendidikan alternatif memberikan layanan kepada mayarakat yang karena kondisi geografis, sosial budaya, ekonomi dan psikologis tidak berkesempatan mengikuti pendidikan dasar dan menengah di jalur pendidikan formal. Kurikulum pendidikan kesetaraan dikembangkan mengacu pada kurikulum 2013 pendidikan dasar dan menengah hasil revisi berdasarkan peraturan Mendikbud No.24 tahun 2016. Proses adaptasi kurikulum 2013 ke dalam kurikulum pendidikan kesetaraan adalah melalui proses kontekstualisasi dan fungsionalisasi dari masing-masing kompetensi dasar, sehingga peserta didik memahami makna dari setiap kompetensi yang dipelajari.

Pembelajaran pendidikan kesetaraan menggunakan prinsip flexible learning sesuai dengan karakteristik peserta didik kesetaraan. Penerapan prinsip pembelajaran tersebut menggunakan sistem pembelajaran modular dimana peserta didik memiliki kebebasan dalam penyelesaian tiap modul yang di sajikan. Konsekuensi dari sistem tersebut adalah perlunya disusun modul pembelajaran pendidikan kesetaraan yang memungkinkan peserta didik untuk belajar dan melakukan evaluasi ketuntasan secara mandiri.

Tahun 2017 Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan, Direktorat Jendral Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat mengembangkan modul pembelajaran pendidikan kesetaraan dengan melibatkan Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru dan tutor pendidikan kesetaraan. Modul pendidikan kesetaraan disediakan mulai paket A tingkat kompetensi 2 (kelas 4 Paket A). Sedangkan untuk peserta didik Paket A usia sekolah, modul tingkat kompetensi 1 (Paket A setara SD kelas 1-3) menggunakan buku pelajaran Sekolah Dasar kelas 1-3, karena mereka masih memerlukan banyak bimbingan guru/tutor dan belum bisa belajar secara mandiri.

Kami mengucapkan terimakasih atas partisipasi dari Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru, tutor pendidikan kesetaraan dan semua pihak yang telah berpartisipasi dalam penyusunan modul ini.

Jakarta, Desember 2018
Direktur Jenderal

Harris Iskandar

Daftar Isi

Modul 8. Keteraturan Barisan dan Penyajian Data dalam Bentuk Matriks
Petunjuk Penggunaan Modul ....
Pengantar Modul ....

Unit 1 Barisan Kendaraan di Sebuah Parkiran ....
Uraian Materi :
8.1 Pengertian Matriks
8.2 Jenis-jenis Matriks.
8.3 Operasi Dasar Matriks.
8.3.1 Penjumlahan dan pengurangan Matriks
8.3.2 Perkalian Matriks
Soal Latihan
8.4 Determinan dan Invers Matriks
8.4.1 Determinan Matriks
a) Determinan Matriks Ordo 2 x 2
b) Determinan Matriks Ordo 3 x 3
8.4.2 Invers Matriks
a) Invers matriks ordo 2×2
b) Invers matriks ordo 3×3
Soal Latihan
8.5 Transpose Matriks
Soal Latihan

Unit 2 Jadwal Perjalanan dan Tabel Komoditas Barang
Uraian Materi :
8.6 Kesamaan Matriks
8.7 Aplikasi Matriks
8.71 Aplikasi Determinan Matriks dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Linear
8.72 Aplikasi Invers Matriks dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Linear
Soal Latihan ....

Rangkuman ....
Saran Referensi ....
Kriteria Pindah/Lulus Modul ....
Penilaian ....
Kunci Jawaban ....
Daftar Pustaka ....
Profil Penulis ....

MODUL 8.
KETERATURAN BARISAN DAN
PENYAJIAN DATA DALAM BENTUK MATRIKS

Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini mengulas tentang penerapan konsep **matriks** sebagai kumpulan bilangan maupun simbol yang yang dibentuk berdasarkan baris dan kolom serta menyelesaikan permasalahan sehari-hari lainnya yang berkaitan dengan matriks. Pembahasan ini diawali dengan memahami lebih dalam tentang matriks, menemukan jenis-jenis matriks, operasi matriks baik penjumlahan, pengurangan, perkalian, determinan dan invers matriks, transpos matriks, serta mengaplikasikan determinan maupun invers matriks kedalam sistem persamaan linear. Selain penjelasan mengenai materi yang ditampilkan, modul ini juga dilengkapi dengan latihan untuk menguji pemahaman dan penguasaan dari peserta didik terhadap materi yang telah di pelajarinya. Modul ini disusun dengan bahasa yang sederhana, dan dibuat berurutan sesuai de ngan urutan materi yang terlebih dahulu perlu dikuasai. Untuk itu, sebelum mempelajari modul ini sebaiknya.

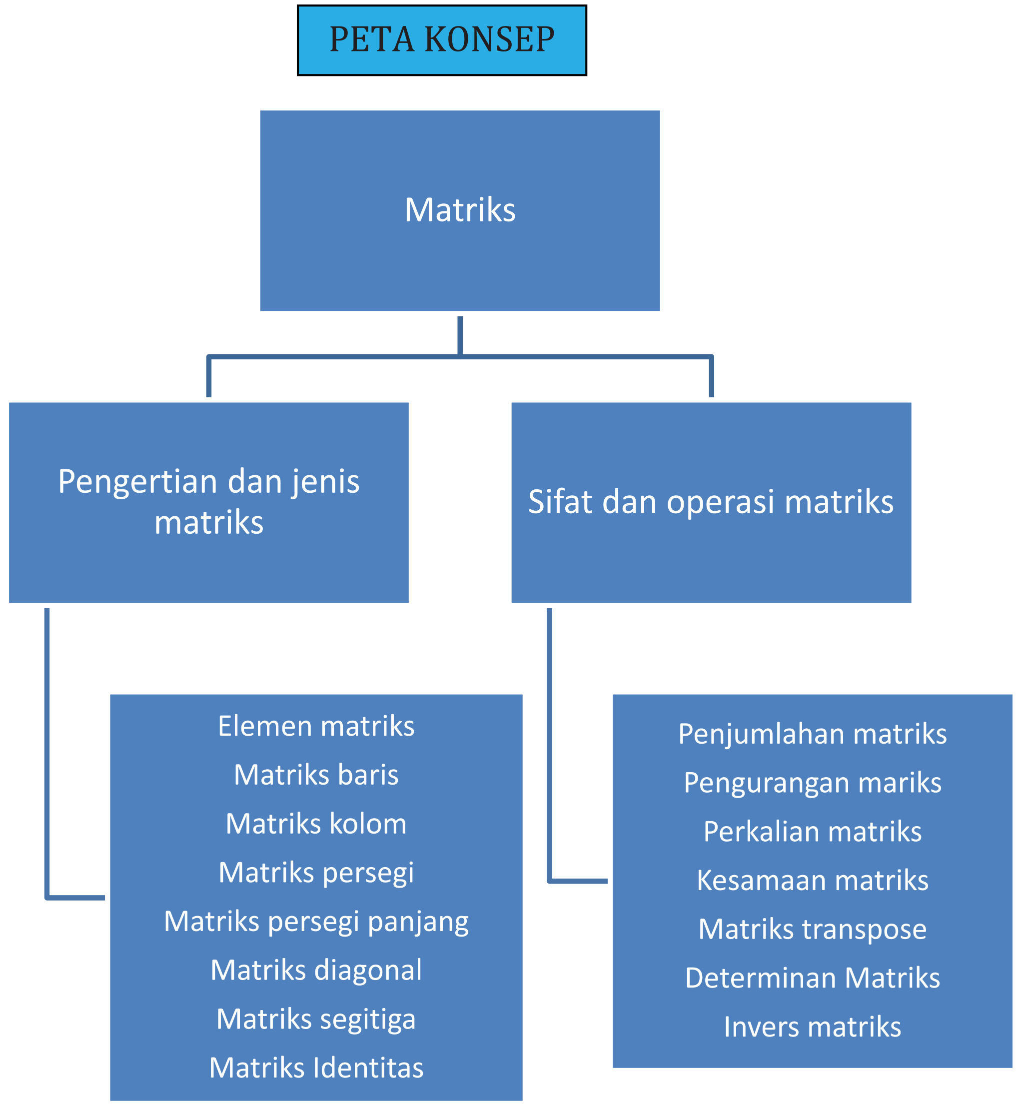
1. Baca pengantar modul untuk mengetahui arah pengembangan modul
2. Membaca kompetensi dasar dan tujuan yang ingin dicapai melalui modul.
3. Agar memperoleh gambaran yang utuh mengenai modul, maka pengguna perlu membaca dan memahami peta konsep.
4. Mempelajari modul secara berurutan agar memperoleh pemahaman yang utuh.
5. Ikuti semua tahapan dan petunjuk yang ada pada modul ini

Tujuan yang Diharapkan Setelah Mempelajari Modul

Tujuan pembelajaran modul ini, agar Anda:
1. Memahami konsep dan jenis-jenis matriks dan penerapannya dalam menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari.
2. Terampil melakukan operasi matriks dan menyelesikan masalah sehari-hari.
3. Terbentuk dan memiliki sikap kemandirian, bertindak logis, tidak mudah menyerah dan percaya diri menggunakan matematika dalam pengembangan kehidupan sehari-hari. Secara khusus, setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan memiliki kemampuan pengetahuan dan keterampilan dalam menemukan konsep matriks dan menyelesaikan masalah kontekstual; menentukan, menggunakan, dan menyelesaikan masalah matriks.

Pengantar Modul

Banyak peristiwa atau situasi sehari-hari yang dapat dinyatakan dalam simbol atau tabel yang sederhana, ringkas dan akurat agar lebih mudah dipahami sehingga perlu dikenalkan konsep matriks, baik persamaan maupun operasi yang digunakannya. Pada modul ini akan dibahas tentang matriks terutama yang terkait dengan jenis-jenis matriks, operasi dasar matriks baik penjumlahan, pengurangan maupun perkalian matriks, dan penggunaan dari determinan maupun invers matriks serta transpose matriks, aplikasi matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Peta konsep dari materi pelajaran tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.



UNIT 1. BARISAN KENDARAAN DISEBUAH PARKIRAN

Harian Terbit, Parkir di Jakarta (Senin, 29 Agustus 2016 00:26 WIB)

Ilustrasi diatas menggambarkan sebuah parkiran yang ada di kota Jakarta. Nah dari ilustrasi kita akan mempelajari tentang matriks. Sebelum kita pelajari matriks lebih mendalam, maka kita harus tahu apa itu matriks.

8.1 Pengertian Matriks

Matriks dalam matematika merupakan kumpulan bilangan, simbol atau ekspresi yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk tabel persegi panjang. Bilangan atau ekspresi yang terdapat pada suatu matriks disebut dengan elemen atau disebut juga anggota dari suatu matriks.

Matriks banyak dimanfaatkan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan matematika misalnya dalam menemukan solusi masalah persamaan linear, transformasi linear yakni bentuk umum dari fungsi linear contohnya rotasi dalam 3 dimensi. Matriks juga dioperasikan seperti dikalikan, dijumlahkan, dikurangkan, serta didekomposisikan. Menggunakan representasi matriks, perhitungan dapat dilakukan dengan lebih terstruktur.

Ilustrasi matriks.

$$A = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{baris ke-1} \\ \text{baris ke-2} \\ \text{baris ...} \\ \text{baris ke-m} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \text{kolom ke-1} & \text{kolom ke-2} & \text{kolom ...} & \text{kolom ke-m} \end{array} & \end{array}$$

Ilustrasi di atas dapat kamu baca seperti ini: a11 dibaca baris ke-1 dan kolom ke-1; a12 dibaca baris ke-1 dan kolom ke-2; atau amn yang berarti baris ke-m dan kolom ke-n. Banyaknya baris dan kolom dalam matriks disebut dengan **ordo.** Urutan yang perlu diingat adalah **baris** kemudian **kolom.** Misalkan Matriks A dengan ordo 2 x 3 biasanya dinyatakan dengan $A_{2 \times 3}$.

8.2 Jenis-jenis Matriks.

<u>(i) Matriks Nol (O)</u>
Dinamakan matriks nol karena semua elemennya bernilai NOL
Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>(ii) Matriks persegi</u>
Adalah matriks yang banyak barisnya sama dengan banyak kolomnya. Matriks persegi disebut pula dengan matriks bujur sangkar
Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

<u>(iii) Matriks Skalar</u>
Matriks skalar adalah matriks persegi yang elemen-elemen pada lajur diagonalnya bernilai sama.
contoh :

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

<u>(iv) Matriks Identitas</u>
Adalah matriks <u>skalar</u> yang elemen-elemen diagonal utamanya bernilai 1
Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>(v) Matriks Segitiga Atas</u>
Adalah matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya (kiri atas ke kanan bawah) bernilai nol

Contoh :

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

<u>(vi) Matriks Segitiga Bawah</u>
Kebalikan dari segitiga atas, matriks segitiga bawah adalah matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>(vi) Matriks Diagonal</u>
adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen diluar diagonal utama adalah nol
Contoh :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

8.3 Operasi Dasar Matriks.

8.31 Penjumlahan dan pengurangan matriks

Penjumlahan serta pengurangan dalam matriks hanya dapat dilakukan apabila kedua matriks mempunyai ukuran atau ordo yang sama. Elemen-elemen dalam suatu matriks yang dijumlahkan atau dikurangkan yaitu elemen yang memilki posisi/letak yang sama.

Contoh :

Diketahui : $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

Tentukan : A + B

Jawab :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-4) & -3+6 \\ 3+5 & 5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Diketahui : $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 6 \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix}$

Tentukan : C – D

Jawab :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -4 & 6 \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-7 & 2-(-4) & 1-6 \\ -3-3 & 6-5 & -1-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -5 \\ -6 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

8.3.2 Perkalian Matriks

A. Perkalian matriks dengan skalar

Perkalian matriks dengan skalar adalah mengalikan semua elemen-elemen matriks dengan skalarnya.

Contoh :

$$s\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa & sb & sc \\ sd & se & sf \\ sg & sh & si \end{pmatrix}$$

Coba perhatikan cara melakukan perkalian matriks dengan skalar berikut :

Diketahui skalar s = 3 dengan matriks A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

$$sA = 3\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 9 & 6 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$$

B. Perkalian dua matriks

Misalkan A matriks dengan ordo m x n dan B matriks dengan ordo n x p. Perkalian dua matriks dapat dilakukan apabila jumlah kolom matriks pertama sama dengan jumlah baris matriks ke dua. Jadi matriks $A_{m \times n}$ dapat dikalikan dengan matriks $B_{n \times p}$ dengan hasil matriks C dengan ordo m x p. Sel pada baris pertama dan kolom pertama dari matriks C merupakan jumlah dari hasil kali tiap sel matriks A pada baris pertama dengan sel pada kolom pertama dari matriks B. Misalkan A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$. Jumlah kolam matriks A sama dengan jumlah baris matriks B, jadi A dapat dikalikan dari kiri dengan B, yaitu:

$$A \times B = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

Contoh

Misalkan A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Maka (a) Tentukan AB ; (b) apakah AB = BA?

a. $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (1)(1) + (-1)(0) + (2)(-3) & (1)(2) + (-1)(-1) + (2)(1) \\ (3)(1) + (0)(0) + (-1)(-3) & (3)(2) + (0)(-1) + (-1)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + 0 - 6 & 2 + 1 + 2 \\ 3 + 0 + 3 & 6 + 0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

b. Matriks A memiliki ordo 2 x 3 dan matriks B memiliki ordo 3 x 2. Jadi B dapat dikalikan dari kiri dengan A, yaitu

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1)(1) + (2)(3) & (1)(-1) + (2)(0) & (1)(2) + (2)(-1) \\ (0)(1) + (-1)(3) & (0)(-1) + (-1)(0) & (0)(2) + (-1)(-1) \\ (-3)(1) + (1)(3) & (-3)(-1) + (1)(0) & (-3)(2) + (1)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

Dapat disimpulkan bahwa jika A dan B matriks yang dapat dikalikan maka AB ≠ BA.

Untuk pembahasan perkalian matriks ukuran 3 x 2 dengan ukuran 2 x 1

Perhatikan contoh berikut!

Diketahui :

A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jawab :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x4 + 3x1 \\ 2x4 + 2x1 \\ 4x4 + 3x1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 \\ 8+2 \\ 16+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Sifat-sifat operasi perkalian matriks meliputi sifat asosiatif dan distributif

Sifat-sifat Operasi Perkalian Matriks

Sifat Asosiatif : $A(BC) = (AB)C$

Sifat Distributif : $A(B + C) = AB + AC$ **dan** $(A + B)C = AC + BC$

Perkalian matriks tidak komutatif: AB ≠ BA

Latihan 1

Selesaikan soal dibawah ini dengan benar!

1. Diketahui matriks X= $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$ dan matriks Y= $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

   Tentukan!
   X+Y dan X-Y

2. Diketahui skalar a = $\frac{1}{3}$ dan matriks L=$\begin{pmatrix} 12 & 3 & 9 \\ 6 & 15 & 6 \end{pmatrix}$

   Tentukan!

   aY

3. Diketahui matriks M=$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan matriks N=$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

   Tentukan!

   M.N

4. Jika A adalah matriks 2 x 2, tentukanlah penyelesaian setiap persamaan berikut ini!

   a. 3A = $\begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$ b. 2A + $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ c. 4A - $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

5. Jika A = $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; C = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, tentukanlah :

   a. B + C   b. AC

   c. A(B+C)   d. BA + CA

8.5 Transpose Matriks

Adalah matriks baru yang merupakan hasil pertukaran baris dan kolom
Tranpose matriks di notasikan $\mathbf{A}^t$ (dibaca: A transpose).
Sehingga transpose matriks A adalah A^t

Jika $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$, maka $A^t = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$

Jika matriks A berordo m × n maka transpose A memiliki ordo n × m.
Secara Umum bisa dituliskan :

$$\boxed{A_{m\times n} \text{ , maka } A^t{}_{n\times m}}$$

Contoh :

1. $A_{2\times2} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ maka $A^t{}_{2\times2} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

2. $B_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ maka $B^t{}_{3\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

8.4 Invers dan Determinan Matriks

Dalam sistem bilangan real kita mengenal sehingga perkalian sebuah bilangan dengan kebalikannya hasilnya 1. Misalnya 2 kebalikannya ½ atau 2^{-1} karena 2 (½) = 1, kebalikan dari –3 adalah 1/3 atau 3^{-1}, dan sebagainya.

Misalkan matriks persegi A = $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} -1 & -2.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$. Sekarang perhatikan perkalian matriks berikut.

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(-1)+10(0.5) & 4(-2.5)+10(1) \\ -2(-1)+-4(0.5) & -2(-2.5)+-4(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & -2.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1(4)+-2.5(1) & -1(10)+-2.5(-4) \\ 0.5(4)+1(-2) & 0.5(10)+1(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Kita katakan matriks B merupakan matriks invers dari A (ditulis A^{-1}) karena AB = AA^{-1} = I.

Apakah setiap matriks persegi memiliki invers? Misalnya, apakah matriks S = $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ memiliki invers? Andaikan matriks S memiliki invers $S^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka diperoleh:

$SS^{-1} = I$

$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (uraikan perkalian matriks ruas kiri)

$\begin{bmatrix} 3a+6c & 3b+6d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (gunakan pengertian kesamaan matriks)

diperoleh sistem persamaan

3a + 6c = 1   3b + 6d = 0

2a + 4c = 0   2b + 4d = 1

Dengan menyederhakan dan mengurangkan persamaan-persamaan tersebut diperoleh

a + 3c = ½   b + 2d = 0

a + 2c = 0   b + 2d = ½

------------ –   -------------- –

c = ½ 0 = –½ (menghasilkan pernyataan tidak benar)

Karena sistem persamaan tersebut menghasilkan pernyataan tidak benar atau menimbulkan pertentangan, ini berarti sistem persamaan tidak memiliki solusi. Jadi, tidak ada matriks S^{-1} yang merupakan invers dari matriks S = $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Kesimpulannya, tidak semua matriks persegi memiliki invers. Sebelum berlanjut ke pengertian matriks invers, kita bahas determinan sebuah matriks yang menunjukkan invers matriks ada atau tidak ada.

8.41 Determinan Matriks

Cara menghitung determinan matriks persegi tergantung ukuran matriks tersebut. Cara menghitung nilai determinan matriks bujur sangkar dengan ordo 3x3 akan berbeda dengan cara menghitung matriks bujur sangkar dengan ordo 2x2.

a) Determinan Matriks Ordo 2 x 2

Diketahui, matriks ordo 2x2 dinyatakan seperti bentuk di bawah.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Nilai determinan A disimbolkan dengan $|A|$, cara menghitung nilai determinan A dapat dilihat seperti pada cara di bawah ini :

$$det\,(A) = |A| = ad - bc.$$

Contoh :

Tentukan nilai determinan matriks B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Jawab :

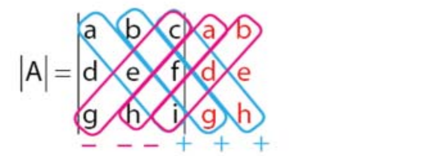
$$|A| = ad - bc = 2.5 - 1.4 = 10 - 4 = 6$$

b) Determinan Matriks Ordo 3 x 3

Matriks Ordo 3 adalah matriks bujur sangkar dengan banyaknya kolom dan baris sama dengan tiga. Bentuk umum matriks ordo 3 adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Cara menghitung determinan pada matriks dengan ordo tiga biasa disebut dengan *Aturan Sarrus*. Untuk lebih jelasnya, lihat penjelasan pada gambar di bawah ini :



$$|A| = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Contoh :

Tentukan nilai determinan matriks M = $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Jawab :

$$\begin{aligned} |M| &= 4.6.2 + 2.6.1 + 5.3.3 - 5.6.1 - 4.6.3 - 2.3.3 \\ &= 48 + 12 + 45 - 30 - 72 - 18 \\ &= 105 - 120 \\ &= -15 \end{aligned}$$

8.42 Invers Matriks

a) Invers matriks ordo 2×2

$$Jika\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, maka\ A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Contoh :

Jika A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$, maka $A^{-1} = \frac{1}{3.4 - (-2).(-5)} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{12 - 10} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & \frac{2}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

b) Invers matriks ordo 3×3

Sebelum menentukan invers matriks persegi A ordo tiga atau lebih, perlu diperkenalkan kofaktor, minor matriks A atau M_{ij}, dan adjoin matriks A atau adj(A). Jika $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, maka:

i. Minor dari matriks A (M_{ij}) adalah determinan matrik yang diperoleh dengan menghapus baris ke $-\,i$ dan kolom ke $-\,j$.

Jika $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, maka

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}=e\cdot i-f\cdot h$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}=d\cdot i-f\cdot g$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}=d\cdot h-e\cdot g$$

dan seterusnya sampai M_{33}

ii. Kofaktor dari matriks A

$$K_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$$

$$K_{11}=(-1)^{2}\cdot M_{11}=1\cdot M_{11}$$

$$K_{12}=(-1)^{3}\cdot M_{12}=-1\cdot M_{12}$$

$$K_{13}=(-1)^{4}\cdot M_{13}=1\cdot M_{13}$$

dan seterusnya sampai K_{33}

Kita peroleh matriks kofaktor K = $\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$ sehingga dari adj(A) = transpose dari matriks kofaktor K = K^{t} = $\begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & K_{31} \\ K_{12} & K_{22} & K_{32} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix}$. Diperoleh invers dari matriks A, yaitu

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot Adj(A).$$

Contoh:

Diketahui $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, tentukan A^{-1}.

Pembahasan:

i) Determinan

$$\det A=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & -10 & 6 & 9 \\ -3 & -2 & 7 & -3 & -2 \end{array}\right|$$

$$\begin{aligned} &=1\cdot 9\cdot 7+1\cdot(-10)\cdot(-3)+(-2)\cdot 6\cdot(-2) \\ &\quad -(-2)\cdot 9\cdot(-3)-1\cdot(-10)\cdot(-2)-1\cdot 6\cdot 7 \\ &=63+30+24-54-20-42 \\ &=117-116 \\ &=1 \end{aligned}$$

ii) Minor

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 9 & -10 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}=9\cdot 7-(-10)\cdot(-2)=63-20=43$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix} 6 & -10 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}=6\cdot 7-(-10)\cdot(-3)=42-30=12$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=6\cdot -2-9\cdot(-3)=-12+27=15$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}=1\cdot 7-(-2)\cdot(-2)=7-4=3$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}=1\cdot 7-(-2)\cdot(-3)=7-6=1$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot -2-1\cdot(-3)=-2+3=1$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -10 \end{vmatrix}=1\cdot(-10)-(-2)\cdot 9=-10+18=8$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}=1\cdot(-10)-(-2)\cdot 6=-10+12=2$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}=1\cdot 9-1\cdot 6=9-6=3$$

iii) Kofaktor

$$K_{11}=(-1)^{2}\cdot 43=1\cdot 43=43$$

$$K_{12}=(-1)^{3}\cdot 12=-1\cdot 12=-12$$

$K_{13} = (-1)^4 \cdot 15 = 1 \cdot 15 = 15$

$K_{21} = (-1)^3 \cdot 3 = -1 \cdot 3 = -3$

$K_{22} = (-1)^4 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$

$K_{23} = (-1)^5 \cdot 1 = -1 \cdot 1 = -1$

$K_{31} = (-1)^4 \cdot 8 = 1 \cdot 8 = 8$

$K_{32} = (-1)^5 \cdot 43 = -1 \cdot 2 = -2$

$K_{33} = (-1)^6 \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$

$$\text{Adj }(A) = \text{K}^t = \begin{bmatrix} 43 & -3 & 8 \\ -12 & 1 & -2 \\ 15 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot Adj\,(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 43 & -3 & 8 \\ -12 & 1 & -2 \\ 15 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & -3 & 8 \\ -12 & 1 & -2 \\ 15 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Alternatif lain mencari adjoin matriks A:

$$Adj\,(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Contoh:

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, tentukan A^{-1}.

Pembahasan:

$$\det A = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 6 & 9 \\ -3 & -2 \end{matrix}\right|$$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 9 \cdot 7 + 1 \cdot (-10) \cdot (-3) + (-2) \cdot 6 \cdot (-2) \\ &\quad - (-2) \cdot 9 \cdot (-3) - 1 \cdot (-10) \cdot (-2) - 1 \cdot 6 \cdot 7 \\ &= 63 + 30 + 24 - 54 - 20 - 42 \\ &= 117 - 116 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$Adj\,(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 9 & -10 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -10 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 6 & -10 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -10 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} +(63-20) & -(7-4) & +(-10+18) \\ -(42-30) & +(7-6) & -(-10+12) \\ +(-12+27) & -(-2+3) & +(9-6) \end{bmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} +(43) & -(3) & +(8) \\ -(12) & +(1) & -(2) \\ +(15) & -(1) & +(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & -3 & 8 \\ -12 & 1 & -2 \\ 15 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 43 & -3 & 8 \\ -12 & 1 & -2 \\ 15 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & -3 & 8 \\ -12 & 1 & -2 \\ 15 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Menentukan invers matriks dapat pula dikerjakan dengan menggunakan operasi baris elementer (OBE). Yang termasuk dalam operasi ini adalah: (1) mengalikan baris suatu matriks dengan skalar tidak nol; (2) menukar letak baris: atau (3) menambah baris suatu ke baris lainnya. Misalkan A = $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, maka dengan menggunakan operasi baris diperoleh:

$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, matriks A_1 dibentuk dari A dengan baris 3 dikali –2

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$ matriks A_2 dibentuk dari A_1 dengan baris 1 dikali 2 ditambahkan ke baris 2.

$$\sim \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$ matriks A_3 dibentuk dari A_2 dengan menukar letak baris 1 dan baris 2

Matriks-matriks yang diperoleh melalui operasi baris elementer terhadap matriks lain disebut dengan matriks ekivalen. Jadi, A, A_1, A_2, dan A_3 merupakan matriks-matriks yang ekivalen.

Misalkan A matriks persegi, maka dengan melakukan serangkaian operasi baris elementer terhadap A | I akan diperoleh I | A^{-1}, sebagai berikut.

$$A \mid I = \begin{array}{cccccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{cccccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

(baris 1 dikali 2 ditambahkan ke baris 3)

$$\sim \begin{array}{cccccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 & 2 & -1/2 & 1 \end{array}$$

(baris 2 dikali -1/2 ditambahkan ke baris 3)

$$\sim \begin{array}{cccccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/7 & -1/7 & 2/7 \end{array}$$

(baris 1, 2, 3 berturut-turut dikali –1, ½, dan 2/7)

$$\sim \begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 0 & 1/7 & -2/7 & 4/7 \\ 0 & 1 & 0 & -2/7 & 8/14 & -1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 4/7 & -1/7 & 2/7 \end{array}$$

(baris 3 dikali –1/2 ditambahkan ke baris 2, dan baris 3 dikali 2 ditambahkan ke baris 1)

$$\sim \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -1/7 & 2/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 & -2/7 & 8/14 & -1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 4/7 & -1/7 & 2/7 \end{array} = I \mid A^{-1}.$$

(baris 2 ditambahkan ke baris 1)

Jadi, invers dari A adalah $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/7 & 2/7 & 3/7 \\ -2/7 & 4/7 & -1/7 \\ 4/7 & -1/7 & 2/7 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Kegiatan 1:

1. Hitunglah determinan dari matriks-matriks di bawah ini!

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

c. $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

d. $Q = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

2. Jika $D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,

hitunglah : M_{11} ; M_{22} ; M_{31} ; K_{12} ; K_{23} ; K_{32}

Kegiatan 2

1. Tentukan determinan dari matriks berikut :
   a. $C=\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$
   b. $D=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$
2. Tentukan invers dari matriks berikut :
   a. $M=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$
   b. $N=\begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
3. Tentukan transpose dari matriks berikut :
   a. $O=\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$
   b. $P=\begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$
4. Diketahui sebuah matriks $A=\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, maka determinan dari transpose matriks A adalah….
5. Diketahui matriks $X=\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, invers dari transpose matriks X adalah….

UNIT 2. JADWAL PERJALANAN DAN TABEL KOMODITAS BARANG

Jadwal Perjalanan Kereta Api Cirebon Ekspres PP

STASIUN	KA 64		STASIUN	KA 65	
	DATANG	BERANGKAT		DATANG	BERANGKAT
GAMBIR	-	10.00	CIREBON	-	10.00
HAURGEULIS	11.53	11.55	JATIBARANG	10.32	10.34
JATIBARANG	12.29	12.31	JATINEGARA	12.49	12.51
CIREBON	13.04	-	GAMBIR	13.02	-

Jadwal perjalanan kereta api Cirebon Ekspres PP (Stasiun Gambir – Stasiun Cirebon)

8.6 Kesamaan Matriks

Dua atau lebih matriks dikatakan sama bila memiliki ordo (jumlah baris dan kolom) sama dan elemen atau komponen yang bersesuaian sama. Dengan kata lain matriks-matriks tersebut adalah matriks yang sama hanya saja dengan nama berbeda.

Prinsip kesamaan matriks pada umumnya digunakan untuk menentukan komponen pada sel tertentu atau menentukan variabel yang terdapat dalam komponen penyusun matriks. Prinsip kesamaan matriks umumnya dihubungkan dengan persamaan matematika lainnya seperti persamaan linear dua variabel, persamaan kuaadrat, eksponensial, logaritma ataupun trigonometri.

Konsep Kesamaan Matriks

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{bmatrix}$$

Bila dua matriks diatas dinyatakan sama, maka berlaku :

$a = p \quad b = q \quad c = r$

$d = s \quad e = t \quad f = u$

$g = v \quad h = w \quad i = x$

Matriks memiliki banyak kegunaan, di antaranya adalah untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Untuk memahami penerapan matriks yang lebih luas, kita perlu untuk mengetahui operasi-operasi dalam matriks, dalam pembahasan ini kita hanya akan membahas operasi penjumlahan dan pengurangan, serta kesamaan dari dua matriks.

Untuk mempelajari matriks secara efektif, pertama kita akan mendefinisikan matriks secara umum. Untuk matriks umum A, semua elemen/anggotanya dinotasikan sebagai huruf kecil "a", dengan posisi dari elemen tersebut ditunjukkan dengan indeks rangkap a_{ij}. Huruf i dan j secara berturut-turut menyatakan urutan baris dan kolom dari elemen matriks yang dimaksud. Matriks A secara umum dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ukuran dari matriks disebut sebagai **ordo**, sehingga kita dapat mengatakan bahwa matriks A di atas berordo $m \times n$. Perhatikan bahwa semua elemen-elemen yang terletak pada diagonal matriks memiliki bilangan kolom dan baris yang sama, a_{ij}, dimana $i = j$. Demikian juga, apabila elemen-elemen dari matriks A dituliskan dengan a_{ij}, maka elemen-elemen dari matriks B dapat dituliskan sebagai b_{ij}, elemen-elemen matriks C sebagai c_{ij}, dan seterusnya.

Contoh : Mengidentifikasi Ordo dan Elemen dari Suatu Matriks

Nyatakan ordo dari masing-masing matriks berikut dan elemen-elemen yang bersesuaian dengan a_{22}, a_{31}; b_{22}, b_{31}; dan c_{22}, c_{31}.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,6 & -2 & -0,4 \\ 2,3 & 1,5 & -3 \end{bmatrix}$$

Pembahasan Matriks A memiliki 2 baris dan 2 kolom, sehingga matriks A berordo 2×2, dengan $a_{22} = 2$ (elemen yang terletak pada kolom ke-2 dan baris ke-2 adalah 2), dan tidak ada elemen a_{31} dalam matriks A (A hanya berordo 2×2). Matriks B memiliki 3 baris dan 2 kolom, sehingga ordo dari matriks B adalah 3×2, dengan $b_{22} = 4$ dan $b_{31} = 5$. Matriks C memiliki ordo 3×3 dengan $c_{22} = -2$ dan $c_{31} = 2,3$.

Contoh : Menentukan Apakah Dua Matriks Sama

Tentukan apakah pernyataan-pernyataan berikut benar, salah, atau kondisional. Jika salah, jelaskan. Jika kondisional, temukan nilai yang membuat pernyataan tersebut benar.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-3 & 3b \\ 2 & 2c \end{bmatrix}$

Pembahasan

1. Pernyataan pada poin 1 adalah salah. Matriks tersebut memiliki ordo yang sama, yaitu 2 × 2, dan elemen-elemen yang sama, tetapi elemen-elemen yang bersesuaian tidaklah sama. Pilih elemen pada baris pertama dan kolom pertama, yaitu 1 pada matriks di ruas kiri, sedangkan pada matriks ruas kanan elemen tersebut adalah 3.
2. Pernyataan pada poin 2 juga salah, karena ordo dari matriks-matriks tersebut tidaklah sama. Ordo dari matriks di ruas kiri adalah 3 × 2, sedangkan matriks di ruas kanan berordo 2 × 3.
3. Pernyataan pada poin 3 adalah kondisional. Agar pernyataan tersebut bernilai benar, maka $a - 3 = 1$ ($a = 4$), $3b = 3$ ($b = 1$), $c = 2$, dan akan salah jika tidak memenuhi salah satu (atau lebih) dari syarat tersebut.

8.7 Aplikasi Matriks

8.71 Aplikasi Determinan Matriks dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Linear

a) Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ dapat diubah ke dalam bentuk persamaan matriks AX = C, yaitu:

$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$. Dengan mengalikan A^{-1} dari kiri diperoleh $A^{-1}AX = A^{-1}C$ sehingga $IX = A^{-1}C$ atau $X = A^{-1}C$. Jadi,

$$X = \frac{1}{detA}\begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{detA}\begin{bmatrix} b_2c_1 - b_1c_2 \\ a_1c_2 - a_2c_1 \end{bmatrix}$$

Jadi $$x = \frac{1}{detA}(b_2c_1 - b_1c_2) = \frac{1}{detA}\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{detA_x}{detA}$$

$$y = \frac{1}{detA}(a_1c_2 - a_2c_1) = \frac{1}{detA}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \frac{detA_y}{detA}$$

b) Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

$\begin{cases} a1x + b1y + c1z = k1 \\ a2x + b2y + c2z = k2 \\ a3x + b3y + c3z = k3 \end{cases}$, dapat diselesaikan dengan determinan sebagai berikut :

$D = \begin{bmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{bmatrix}$ $\quad$ $Dx = \begin{bmatrix} k1 & b1 & c1 \\ k2 & b2 & c2 \\ k3 & b3 & c3 \end{bmatrix}$

$Dy = \begin{bmatrix} a1 & k1 & c1 \\ a2 & k2 & c2 \\ a3 & k3 & c3 \end{bmatrix}$ $\quad$ $Dz = \begin{bmatrix} a1 & b1 & k1 \\ a2 & b2 & k2 \\ a3 & b3 & k3 \end{bmatrix}$

$x = \frac{Dx}{D}$; $y = \frac{Dy}{D}$; dan $z = \frac{Dz}{D}$

Contoh :

1. Seorang pedagang menjual semua baju dan dasi seharga 1000 dolar (Amerika). Harga 3 baju adalah 10 dolar dan sebuah dasi adalah 2 dolar. Jika ia hanya menjual $\frac{1}{2}$ dari jumlah baju dan $\frac{2}{3}$ dari jumlah dasi, maka ia dapat mengumpulkan uang 600 dolar. Berapakah jumlah masing-masing barang yang telah ia jual?

Jawab :

Misalkan : x = jumlah baju yang telah dijual

y = jumlah dasi yang telah dijual, maka :

$\begin{cases} \frac{10}{3}x + 2y = 1000 \\ \frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}x\right) + 2\left(\frac{2}{3}y\right) = 600 \end{cases}$ atau $\begin{cases} \frac{10}{3}x + 2y = 1000 \\ \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}y = 600 \end{cases}$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & 2 \\ \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \frac{40}{9} - \frac{10}{3} = \frac{40}{9} - \frac{30}{9} = \frac{10}{9}$$

$$Dx = \begin{bmatrix} 1000 & 2 \\ 600 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \frac{4000}{3} - 1200 = \frac{4000}{3} - \frac{3600}{3} = \frac{400}{3}$$

$$Dy = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & 1000 \\ \frac{5}{3} & 600 \end{bmatrix} = \frac{6000}{3} - \frac{5000}{3} = \frac{1000}{3}$$

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{400}{3} : \frac{10}{9} = \frac{400}{3} \text{ x } \frac{9}{10} = 120 \text{ dan } y = \frac{Dy}{D} = \frac{1000}{3} : \frac{10}{9} = \frac{1000}{3} \text{ x } \frac{9}{10} = 300$$

Jadi, jumlah baju dan dasi yang telah ia jual berturut-turut adalah 120 dan 300

2. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut!

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = -3 \\ x - 3y - 3z = -2 \end{cases}$$

Jawab :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = -3 \\ x - 3y - 3z = -2 \end{cases}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} = \left[\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{matrix}$$

= (2 x(-2) x(-3)) + (1 x 2 x 1) + ((-1) x 3 x (-3)) – ((-1) x (-2) x 1 – (2 x 2 x (-3)) – (1 x 3 x (-3))

= 12 $\cancel{+ 2}$ + 9 $\cancel{- 2}$ – (-12) – (-9)

= 12 + 9 + 12 + 9

= 42

$$Dx = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -3 \end{bmatrix} = \left[\begin{matrix} 5 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -3 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 5 & 1 \\ -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{matrix}$$

= (5 x (-2) x (-3)) + (1 x 2 x (-2) + (-1) x (-3) x (-3) – (-1) x (-2) x (-2) – (5 x 2 x (-3)) – (1 x (-3) x (-3)

= 30 + (-4) + (-9) – (-4) – (-30) – (9)

= 30 $\cancel{- 4}$ – 9 $\cancel{+ 4}$ + 30 – 9

= 64 – 22

= 42

$$Dy = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \left[\begin{matrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{matrix}$$

= (2 x (-3) x (-3)) + (5 x 2 x 1) + ((-1) x 3 x (-2)) – ((-1) x (-3) x 1) – (2 x 2 x (-2) – (5 x 3 x (-3))

= 18 + 10 + 6 – 3 – (-8) – (-45)

= 18 + 10 + 6 – 3 + 8 + 45

= 87 – 3

= 84

$$Dz = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \left[\begin{matrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{matrix}$$

= (2 x (-2) x (-2)) + 1 x (-3) x 1 + 5 x 3 x (-3) – (5 x (-2) x 1) – (2 x (-3) x (-3)) – (1 x 3 x (-2))

= 8 + (-3) + (-45) – (-10) – (18) – (-6)

= 8 – 3 – 45 + 10 – 18 + 6

= 24 – 66

= - 42

Sehingga : x = $\frac{Dx}{D} = \frac{42}{42}$ = 1 ; y = $\frac{Dy}{D} = \frac{84}{42}$ = 2 ; z = $\frac{Dz}{D} = \frac{-42}{42}$ = -1

Jadi, HP = $\{(1,2,-1)\}$

8.72 Aplikasi Invers Matriks dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Linear

Suatu sistem persamaan : $\begin{cases} a1x + b1y = c1 \\ a2x + b1y = c2 \end{cases}$, dapat ditulis sebagai perkalian dari matriks koefisien dengan variabelnya yaitu :

$\begin{bmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \end{bmatrix}$, dengan $\begin{bmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{bmatrix}$ disebut ***matriks koefisien***

Untuk menyelesaikan sistem persamaan ini, kedua ruas dikalikan dengan invers dari matriks koefisiennya.

Contoh :

Hitunglah harga x dan y yang memenuhi system persamaan berikut!

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Jawab :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \text{atau} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matriks Koefisien A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, maka $A^{-1} = \frac{1}{2(1) - 3(1)}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{2-3}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Sehingga :

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 3\\1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}(-1x2)+(3x1) & ((-1)x3)+(3x1)\\(1\ x\ 2)+((-2)x1 & (1x3)+((-2)x1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1x9)+(3x2)\\(1\ x\ 9)+((-2)x2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$$

Jadi, x = -3 dan y = 5

Latihan 2:

1. Dengan determinan matriks, tentukan nilai variabel dari sistem persamaan berikut!

a. $\begin{cases}4x+2y=5\\3x+4y\ =1\end{cases}$ b. $\begin{cases}3u+2v-18=0\\5u-v-12\ =0\end{cases}$

2. Dengan invers matriks, tentukan nilai variabel dari sistem persamaan berikut!

a. $\begin{cases}4x+2y=5\\3x+4y\ =1\end{cases}$ b. $\begin{cases}3u+2v-18=0\\5u-v-12\ =0\end{cases}$

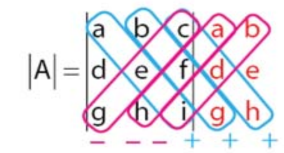
3. Dengan determinan matriks, tentukan nilai x, y dan z dari sistem persamaan berikut!

a. $\begin{cases}2x+y-2z=1\\2x+3y-z=2\\x-2y+2z=-10\end{cases}$ b. $\begin{cases}2x+3y=-2\\5y-2z=4\\4x+2z=-7\end{cases}$

RANGKUMAN

1. Jumlah atau selisih dua matriks yang sama ukurannya sama dengan matriks baru dengan menjumlahkan atau mengurangkan elemen-elemen seletak.
2. Penjumlahan dan pengurangan dua matriks A dan B dapat dilakukan apabila :
   - ordo A = ordo B
   - $A\ \pm\ B=(A_{ij})\pm(B_{pq})$, untuk setiap $i=p$ dan $j=q$
3. Jika A, B, dan C matriks yang mempunyai ordo yang sama, maka berlaku sifat :
   - Identitas : $A+O=A$; dengan $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$
   - Komutatif : $A+B=B+A$
   - Asosiatif : $(A+B)+C=A+(B+C)$

4. Perkalian dua matriks , yaitu matriks baris $A_{1\times n}$ dan $B_{n\times 1}$ akan menghasilkan matriks $C_{1\times 1}$
   Perkalian dua matriks , yaitu matriks baris $A_{m\times p}=(a_{ij})$ dan $B_{p\times n}=(b_{ij})$ akan menghasilkan matriks $C_{m\times n}=(c_{ij})$
   Dalam perkalian dua matriks, jika banyak kolom matriks A tidak sama dengan banyak baris matriks B, maka perkalian matriks A . B tidak terdefinisi.
5. Jika perkalian matriks terdefinisi, maka selalu memenuhi ketentuan berikut :
   C. Asosiatif : (A . B) . C = A . (B . C)
   D. Identitas : A . I = I . A = A
   E. Distributif :
   $A(B\ \pm\ C)=(A\,.\,B)\ \pm(A\,.\,C)$
   $(A\pm B)C=(A\,.\,C)\ \pm(B\,.\,C)$
6. Determinan matriks persegi berordo 2 x 2
   $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\Rightarrow$ det (A) = $a_{11}\,.\,a_{22}-a_{21}\,.\,a_{12}$
   Determinan matriks persegi berordo 3 x 3
   $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, untuk mencari det (A) dapat diselesaikan dengan dua cara:
   Metode Sarrus :



$|A|=aei+bfg+cdh-ceg-afh-bdi$

Metode ekspansi kofaktor
Minor (M_{ij})suatu unsur adalah suatu determinan yang dihasilkan setelah terjadi penghapusan baris ke-I dan kolom ke-j dimana unsur itu terletak.

Contoh : Minor dari $a_{22}=M_{22}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{13}\\a_{31} & a_{33}\end{pmatrix}=a_{11}\,.\,a_{33}-a_{31}\,.\,a_{13}$

Hapus kolom ke-2

$$\begin{pmatrix}a_{11} & \boldsymbol{a_{12}} & a_{13}\\\boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}}\\a_{31} & \boldsymbol{a_{32}} & a_{33}\end{pmatrix}$$

Hapus baris ke-2

Kofaktor dari suatu unsur adalah minor unsur itu berikut tandanya $K_{ij}=(-1)^{i+j}\,.\,M_{ij}$
Menentukan determinan dengan ekspansimenurut baris ke-r

$$|\ \ |=\sum_{j=1}^{3}a_{rj}\,.K_{rj}$$

Menentukan determinan dengan ekspansimenurut kolom ke-r

$$|\ \ |=\sum_{j=1}^{3}a_{rj}\,.K_{rj}$$

7. Invers matriks persegi berordo 2 x 2
   $A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det\ (A)}\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix}$

Invers matriks persegi berordo 3 x 3

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a_{12}} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ a_{31} & \boldsymbol{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det (A)}$. Adjoin (A), dengan Adjoin (A) adalah matriks kofaktor dari setiap elemen matriks A = (a_{ij})

Saran Referensi

- Buku teks Matematika Kurikulum 2013 SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI, Erlangga, 2014

Kriteria Pindah/Lulus Modul

Anda dinyatakan memahami modul ini atau dapat berpindah ke modul berikutnya apabila telah memenuhi salah satu persyaratan berikut.

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan secara lengkap, benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan
2. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, minimal sebesar 75%
3. Mampu mengerjakan test penempatan untuk modul ini dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, minimal sebesar 75%

Anda dinyatakan belum memahami dan menguasai modul ini dan belum dapat berpindah ke modul berikutnya apabila:

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, di bawah sebesar 75%
2. Mengikuti test penempatan dengan hasil di bawah 75%

Penilaian

Kunci Jawaban

Latihan 1:

1. a. X + Y = $\begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 11 & 11 \\ 12 & 11 \end{bmatrix}$ b. X – Y = $\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -5 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

2. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 12 & 3 & 9 \\ 6 & 15 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

3. M . N = $\begin{bmatrix} 32 & 26 & 10 \\ 34 & 30 & 10 \\ 14 & 11 & 4 \end{bmatrix}$

4. a. A = $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ b. A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ c. A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

5. a. B + C = $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

   b. AC = $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$

   c. A(B + C) = $\begin{bmatrix} -4 & 24 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$ d. BA + CA = $\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$

Kegiatan 1:

Determinan dari matriks-matriks di bawah ini adalah :

a. A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

det A = $\left((2\ x\ 1) - (6\ x\ 3)\right) = (2 - 18) = -16$

b. B = $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

det B = $\left((4\ x\ 3) - (1\ x\ (-2))\right) = (12 - (-2)) = (12 + 2) = 14$

c. P = $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

det P = $\left(\left((2\ x\ 1\ x\ (-4)\right) + \left((-3) x\ (-1) x\ 3\right) + (4\ x\ 1\ x\ 2) - (3\ x\ 1\ x\ 4) - (2\ x\ (-1)\ x\ 2) - (-4\ x\ 1\ x\ (-3))\right)$

$= \left((-8 + 9 + 8) - (12) - (-4) - (12)\right)$

$= (9 - 20) = -11$

d. Q = $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

det Q = $\left((4\ x\ 3\ x\ 5) + \left((-1) x\ (-1)\ x\ 7\right) + (2\ x\ 1\ x\ 4) - (7\ x\ 3\ x\ 2) - (4\ x\ (-1)\ x\ 4) - (5\ x\ 1\ x\ (-1)\right)$

$= (60 + 7 + 8 - (42) - (-16) - (-5))$

$= (75 - 21) = 54$

2. Jika D = $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, maka : M_{11} ; M_{22} ; M_{31} ; K_{12} ; K_{23} ; K_{32} adalah:

$M_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = (2\,x\,5) - (3\,x\,(-1))$
$= 10 + 3$
$= 13$

$M_{22} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = (4\,x\,5) - (7\,x\,2)$
$= 20 - 14$
$= 6$

$M_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (1\,x\,(-1)) - (2\,x\,2)$
$= (-1) - 4$
$= -5$

$K_{12} = (-1)^{1+2}. M_{12}$
$= (-1)^3. \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$
$= (-1). \big((1\,x\,5) - (7\,x\,(-1)\big)$
$= (-1). (5 + 7)$
$= (-1). 12$
$= -12$

$K_{23} = (-1)^{2+3}. M_{23}$
$= (-1)^5. \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$
$= (-1). \big((4\,x\,3) - (7\,x\,1\big)$
$= (-1). (12 - 7)$
$= (-1). 5$
$= -5$

$K_{32} = (-1)^{3+2}. M_{32}$
$= (-1)^5. \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
$= (-1). \big((4\,x\,(-1)) - (1\,x\,2)\big)$
$= (-1). \big((-4) - 2\big)$
$= (-1). (-6)$
$= 6$

Kegiatan 2:

1. Determinan dari matriks berikut adalah:

a. $C = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

det C $= \big((4\,x\,8) - (3\,x\,7)\big)$
$= 32 - 21$
$= 11$

b. $D = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

det D $= \big((2\,x\,1\,x\,5) + (5\,x\,6\,x\,3) + (3\,x\,4\,x\,2) - (3\,x\,1\,x\,3) - (2\,x\,6\,x\,2) - (5\,x\,4\,x\,5)\big)$
$= \big((10 + 90 + 24) - (9) - (24) - (100)\big)$
$= (124 - 133)$
$= -9$

2. Tentukan invers dari matriks berikut :

a. $M = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$M^{-1} = \frac{1}{(5\,x\,2)-(4\,x\,2)} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$
$= \frac{1}{10-8} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$
$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-2}{2} \\ \frac{-4}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

b. $N = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$N^{-1} = \frac{1}{\det N}$. Adj.N

Dicari minor nya terlebih dahulu :

$M_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (5\,x\,1) - (2\,x\,2) = 5 - 4 = 1$

$M_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (3\,x\,1) - (1\,x\,2) = 3 - 2 = 1$

$M_{13} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (3\,x\,2) - (1\,x\,5) = 6 - 5 = 1$

$M_{21} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (4\,x\,1) - (2\,x\,4) = 4 - 8 = -4$

$M_{22} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (6\,x\,1) - (1\,x\,4) = 6 - 4 = 2$

$M_{23} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (6\ x\ 2) - (1\ x\ 4) = 12 - 4 = 8$

$M_{31} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = (4\ x\ 2) - (5\ x\ 4) = 8 - 20 = -12$

$M_{32} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = (6\ x\ 2) - (3\ x\ 4) = 12 - 12 = 0$

$M_{33} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = (6\ x\ 5) - (3\ x\ 4) = 30 - 12 = 18$

$$\text{Minor N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 8 \\ -12 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\text{Kofaktor N} = \begin{bmatrix} +(1) & -(1) & +(1) \\ -(-4) & +(2) & -(8) \\ +(-12) & -(0) & +(18) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -8 \\ -12 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj. N} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -12 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -8 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\det N = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \big((6\ x\ 5\ x\ 1) + (4\ x\ 2\ x\ 1) + (4\ x\ 3\ x 2) - (1\ x\ 5\ x\ 4) - (2\ x\ 2\ x\ 6) - (1\ x\ 3\ x\ 4)\big)$$

$$= \big((30 + 8 + 24) - (20) - (24) - (12)\big)$$

$$= (62 - 56)$$

$$= 6$$

Jadi $N^{-1} = \frac{1}{\det N}$.Adj N

$$= \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & -12 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -8 & 18 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{-12}{6} \\ \frac{-1}{6} & \frac{2}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{-8}{6} & \frac{18}{6} \end{bmatrix}$$

3 Transpose dari matriks berikut adalah:

a. $O = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

b. $P = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

4. Matriks $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, maka determinan dari transpose matriks A adalah....

$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, transpose matriks $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$\det A = (7\ x\ 2) - (4\ x\ 3)$
$= 14 - 12$
$= 2$

5. Matriks $X = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, invers dari transpose matriks X adalah....

$X = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$,tanspose matriks $X = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

$\det X = (-3\ x\ (-2)) - (5\ x\ 1)$
$= 6 - 5$
$= 1$

Latihan 2:

1. Dengan determinan matriks, nilai variabel dari sistem persamaan berikut adalah:

a. $\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$

$D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (4\ x\ 4) - (3\ x\ 2)$

$= 16 - 6$

$= 10$

$Dx = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (5\ x\ 4) - (1\ x\ 2)$

$= 20 - 2$

$= 18$

$Dy = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = (4\ x\ 1) - (3\ x\ 5)$

$= 4 - 15$

$= -15$

$x = \frac{Dx}{D} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$

$y = \frac{Dy}{D} = \frac{-15}{10} = \frac{-3}{2}$

Jadi $x = \frac{9}{5}$ dan $y = \frac{-3}{2}$

b. $\begin{cases} 3u + 2v - 18 = 0 \\ 5u - v - 12 = 0 \end{cases}$

$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = (3\ x\ (-1)) - (5\ x\ 2)$

$= -3 - 10$

$= -13$

$Du = \begin{pmatrix} 18 & 2 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} = (18\ x\ (-1)) - (12\ x\ 2)$

$= -18 - 24$

$= -42$

$Dv = \begin{pmatrix} 3 & 18 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} = (3\ x\ 12) - (5\ x\ 18)$

$= 36 - 90$

$= -64$

$u = \frac{Du}{D} = \frac{-42}{-13}$

$v = \frac{Dv}{D} = \frac{-64}{-13}$

Jadi $u = \frac{-42}{-13}$ dan $v = \frac{-64}{-13}$

2. Dengan invers matriks, nilai variabel dari sistem persamaan berikut adalah:

a. $\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

matriks koefisien $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A^{-1} = \frac{1}{16-6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & \frac{-2}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & \frac{-2}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & \frac{-2}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \left(\frac{4}{10}\right)4 + \left(\frac{-2}{10}\right)3 & \left(\frac{4}{10}\right)2 + \left(\frac{-2}{10}\right)4 \\ \left(\frac{-3}{10}\right)4 + \left(\frac{4}{10}\right)3 & \left(\frac{-3}{10}\right)2 + \left(\frac{4}{10}\right)4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{4}{10}\right)5 + \left(\frac{-2}{10}\right)1 \\ \left(\frac{-3}{10}\right)5 + \left(\frac{4}{10}\right)1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \left(\frac{16}{10}\right) + \left(\frac{-6}{10}\right) & \left(\frac{8}{10}\right) + \left(\frac{-8}{10}\right) \\ \left(\frac{-12}{10}\right) + \left(\frac{12}{10}\right) & \left(\frac{-6}{10}\right) + \left(\frac{16}{10}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{20}{10}\right) + \left(\frac{-2}{10}\right) \\ \left(\frac{-15}{10}\right) + \left(\frac{4}{10}\right) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{18}{10}\right) \\ \left(\frac{-11}{10}\right) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{18}{10}\right) \\ \left(\frac{-11}{10}\right) \end{pmatrix}$

Jadi $x = \frac{18}{10}$ dan $y = \frac{-11}{10}$

b. $\begin{cases} 3u + 2v - 18 = 0 \\ 5u - v - 12 = 0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix}$

matriks koefisien $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = B^{-1} = \frac{1}{(-3)-10}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{-13}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{-13} & \frac{-2}{-13} \\ \frac{-5}{-13} & \frac{3}{-13} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \frac{-1}{-13} & \frac{-2}{-13} \\ \frac{-5}{-13} & \frac{3}{-13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{-13} & \frac{-2}{-13} \\ \frac{-5}{-13} & \frac{3}{-13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{-13}\right)3 + \left(\frac{-2}{-13}\right)5 & \left(\frac{-1}{-13}\right)2 + \left(\frac{-2}{-13}\right)(-1) \\ \left(\frac{-5}{-13}\right)3 + \left(\frac{3}{-13}\right)5 & \left(\frac{-5}{-13}\right)2 + \left(\frac{3}{-13}\right)(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{-13}\right)18 + \left(\frac{-2}{-13}\right)12 \\ \left(\frac{-5}{-13}\right)18 + \left(\frac{3}{-13}\right)12 \end{pmatrix}$

3. Dengan determinan matriks, nilai x, y dan z dari sistem persamaan berikut adalah:

a. $\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ x - 2y + 2z = -10 \end{cases}$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{matrix} = (2.3.2 + 1.(-1).1 + (-2).2.(-2) - 1.3.(-2) - (-2).(-1).2 - 2.2.1)$$

$$= (12 - 1 + 8 + 6 - 4 - 4)$$

$$= (12 + 8 + 6 - 1 - 4 - 4)$$

$$= (26 - 9)$$

$$= 17$$

$$Dx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -10 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -10 & -2 \end{matrix} = (1.3.2 + 1.(-1).(-10) + (-2).2.(-2) - (-10).3.(-2) - (-2).(-1).1 - 2.2.1)$$

$$= (6 + 10 + 8 - 60 - 2 + 4)$$

$$= (28 - 60)$$

$$= -32$$

$$Dy = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -10 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -10 \end{matrix} = (2.2.2 + 1.(-1).1 + (-2).2.(-10) - 1.2.(-2) - (-10).(-1).2 - 2.2.1)$$

$$= (8 - 1 + 40 + 4 + 20 - 4)$$

$$= (72 - 5)$$

$$= 67$$

$$Dz = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -10 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{matrix} = (2.3.(-10) + 1.1.1 + 1.2.(-2) - 1.3.1 - 2.1.2 - 10.2.1)$$

$$= (-60 + 1 - 4 - 3 - 4 - 20)$$

$$= -90$$

$x = \frac{Dx}{D} = \frac{-32}{17}$, $y = \frac{Dy}{D} = \frac{67}{17}$, $z = \frac{Dz}{D} = \frac{-90}{17}$

b. $\begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ x + y + z = 6 \\ 3x - y + 2z = 1 \end{cases}$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix} = (2.1.2 + 3.1.3 + (-1).1.(-1) - (3.1.(-1)) - ((-1).1.2) - (2.1.3))$$

$$= (4 + 9 + 1 - (-3) - (-2) - (6))$$

$$= (19 - 6)$$

$$= 13$$

$$Dx = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3 & 3 \\ 6 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} = \big(3.1.2 + 3.1.1 + (-1).6.(-1) - (1.1.(-1)) - \big((-1).1.3\big) - (2.6.3)\big)$$

$$= (6 + 3 + 6 - (-1) - (-3) - 36)$$

$$= (19 - 36)$$

$$= -17$$

$$Dy = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix} = ((2.6.2) + ((-3).1.3 + ((-1).1.(-1)) - ((3.6.(-1)) - (1.1.2) - (2.1.(-3))$$

$$= (24 + (-9) + 1 - (-18) - 2 - (-6))$$

$$= (24 + 1 + 18 + 6 - 9 - 2)$$

$$= (49 - 11)$$

$$= 38$$

$$Dz = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix} = \big((2.1.1) + (3.6.3) + (-3).1.(-1) - ((3.1.(-3)) - \big((-1).6.2\big) - (1.1.3)\big)$$

$$= (2 + 54 + 3 + 9 + 12 - 3)$$

$$= (80 - 3)$$

$$= 77$$

Jadi nilai $x = \frac{Dx}{D} = \frac{-17}{13}$, $y = \frac{Dy}{D} = \frac{38}{13}$, $z = \frac{Dz}{D} = \frac{77}{13}$

Daftar Pustaka

1. Buku Matematika karangan Drs. Sutama

2. Menyelesaikan Persamaan Linear dengan Matriks oleh Muji Suwarno

3. Buku Matematika Program Paket C, Penerbit Arya Duta, karangan Drs. Agus Hidayat

4. http://rumus-matematika.com/materi-matriks-lengkap-dan-contohnya/

5. https://id.wikibooks.org/wiki/Subjek:Matematika/Materi:Matriks

6. https://www.konsep-matematika.com/2015/09/determinan-dan-invers-matriks.html

7. https://idschool.net/sma/operasi-hitung-penjumlahan-pengurangan-perkalian-matriks/

8. https://yos3prens.wordpress.com/2014/12/02/kesamaan-penjumlahan-dan-pengurangan-matriks/

PROFIL PENULIS

Nama Lengkap : Nursanto

Telp Kantor/HP : 021-85903277 ext.0/ 0812 1241 0388

E-Mail : nursanto14@gmail.com

Alamat Kantor : Jl. Kober Pedati Rt.007 Rw.02
Kelurahan Balimester Kecamatan Jatinegara
Kota Administrasi Jakarta Timur.

Bidang Keahlian :

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir
1. Mengajar di PKBM FIZAR (Tahun 2005 – sekarang)
2. Mengajar di PKBM Awwaliyah Rohiim (Tahun 2011 – sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

1. S1 MIPA Jurusan Matematika lulus tahun 1994
2. ….
3. …. dst

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)